

完全直方体の非存在証明

班員: 小出 肇 甲斐 俊輔
川添 颯介 吉田 悠真

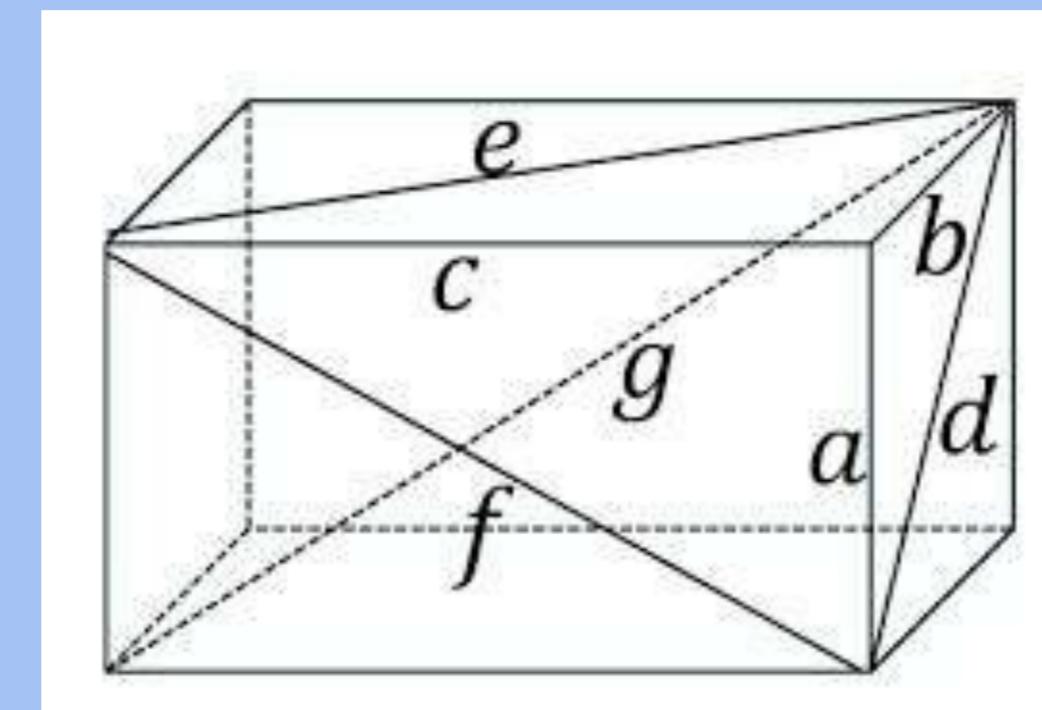
指導者: 持原 光樹先生 菊次 淳先生



研究内容

「完全直方体は存在するのか」という未解決問題。

a,b,c:三辺
d,e,f:平面对角線
g:空間対角線
(a~g:全て自然数)



研究背景

沢山の数学の未解決問題の中で非常にシンプル。
しかし300年以上の歴史を持つ → 関心を持った。

先行研究

- 3辺のうち全ての2辺の長さの組が互いに素であるものは存在しない。
- ・(最小辺の長さ) $\geq 5 \times 10^{11}$ (5000億)
(奇数の辺の長さ) $\geq 2.5 \times 10^{13}$ (25兆)
(立体対角線の長さ) $\geq 9 \times 10^{15}$ (9京)

仮説

コンピュータを用いた莫大な桁数の調査を行って
未発見 → 存在しないと考える。

考察

研究結果(i)~(iv)の対称性とmod7を用いて、
3つの場合で存在しないことを証明。
→ 残りの場合も適切なmod Mを利用した絞込により証明
ができるのではないか。
※Mが大きくなる → 確認計算量増

結論

(A)ディオファントス方程式(整数方程式)に帰着
(B)対称性と倍数性に注目
(A)(B)を利用して解の候補を絞り込んだ。
平面对角線3辺のうちちょうど2辺と空間対角線が
奇数の場合のみ証明が不完全で、ここでは
先行研究による条件を使って実験することで、
modの有効性が示唆された。

今後の展望

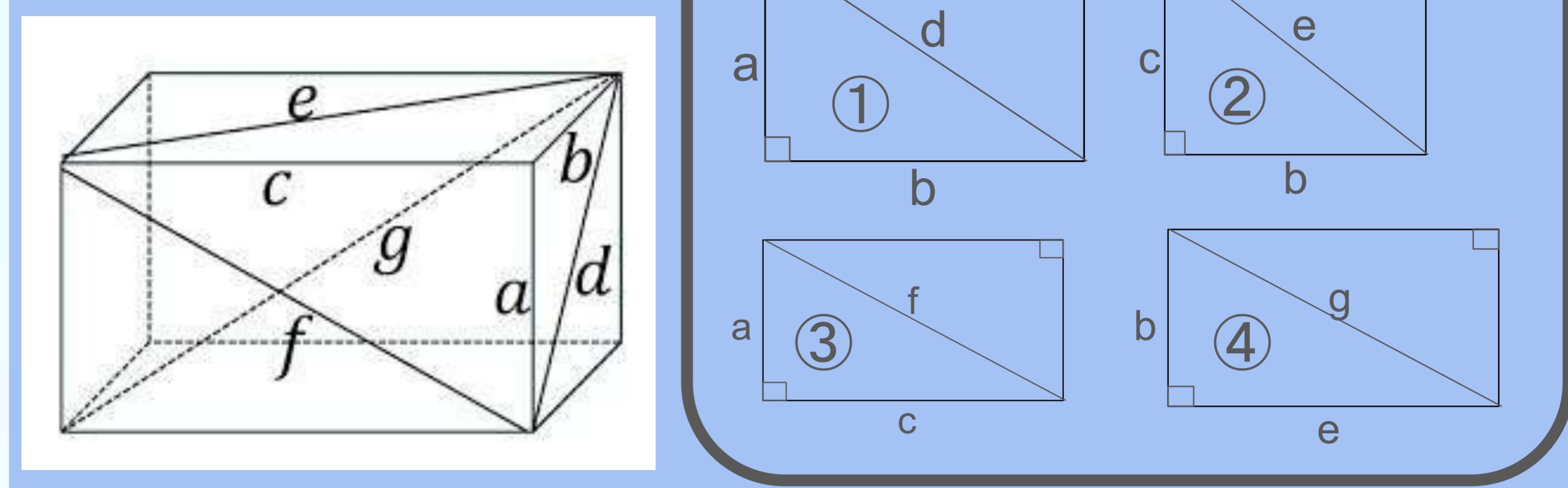
代入のみで証明は不可能。→ modを利用した絞込が効率的かつ網羅的で証明まで可能。

参考文献

子どもが興味を持つ、小学生でもわかる未解決問題のネット一覧
<https://shingakuzyuku-phi.com/unresolved-problem/>

オイラーのレンガとヘロン四面体
https://ikuro-kotaro.sakura.ne.jp/koramu/5071_px.htm

研究結果



直方体の各面に注目して、上図の辺の長さa~gが
全て自然数となる組が存在しないことを示せばよい。
上の三角形に各々三平方の定理を用いることで、
次の方程式①②③④を得る。

$$a^2 + b^2 = d^2 \quad \dots \textcircled{1}$$

$$b^2 + c^2 = e^2 \quad \dots \textcircled{2}$$

$$c^2 + a^2 = f^2 \quad \dots \textcircled{3}$$

$$a^2 + e^2 = g^2 \quad \dots \textcircled{4}$$

上記の式と、自然数条件、平面对角線および
空間対角線である必要条件から次の式を導く。

$$d^2 + e^2 + f^2 = 2g^2 \quad (d \geq 5, e \geq 5, f \geq 5, g \geq 11) \quad \dots \textcircled{5}$$

⑤を満たす自然数d~gを考える。

ここでmod4における自然数nに
関する値を右に示す。右表より

$$2g^2 \equiv 0, 2 \pmod{4}$$

だから

$$d^2 + e^2 + f^2 \equiv 0, 2 \pmod{4}$$

が必要。このことと右表から

d~gの偶奇は以下の2つの場合が考えられる。

- (i) d,e,fのうち2数が奇数, 1数は偶数かつgが奇数
- (ii) d~gが全て偶数

(i) d,e,fの2数が奇数で1数は偶数、gが奇数 (未完)
先行研究より、d~gの一つだけが17,29,37の倍数。ここ
ではd~fの対称性と7で割った余りに注目し、全12通りを
調べた。d',e',g'を自然数として

$$(A) d=29 \cdot 37 d', e=17 e'$$

$$(B) d=29 \cdot 37 d', g=17 g'$$

$$(C) d=37 d', g=17 \cdot 29 g'$$

となる場合のみ、式⑤を満たす自然数の組(d,e,f,g)が存
在しないことを確認した。

- (ii) d~gが全て偶数

式⑤を再掲する。

$$d^2 + e^2 + f^2 = 2g^2 \quad (d \geq 5, e \geq 5, f \geq 5, g \geq 11) \quad \dots \textcircled{5}$$

項は全て偶数だから、式⑤の両辺を4項のうち
少なくとも1つが奇数になるまで2で割り続けると、
方程式に奇数の項が含まれる場合に帰着する。
その場合にはmod4を用いた議論及び(i)より
式⑤を満たすd~gは存在しないから、

- (ii)の場合にも同様。

(i)(ii)より、題意は示された。

n	0	1	2	3
n^2	0	1	0	1
$2n^2$	0	2	0	2