

## 付録 微分のちょっとした応用 ニュートン法

$y = f(x) = x^2 - 3$  という二次関数を  $x$  で微分すると

$$\frac{dy}{dx} = f'(x) = 2x$$

となることを知っている人は多いと思います。

それではこの2つの方程式からコンピューターを使って

$$\sqrt{3} = 1.732050807\dots$$

と $\sqrt{3}$ の値を精度良く出せることを知っていますか。

これはニュートン法といわれるものです。ここではその理論を紹介したいと思います。

図1のように $xy$ 軸上に $y = x^2 - 3$ の曲線があるとき、この曲線と $x$ 軸との交点は $x^2 - 3 = 0$ より $x = \sqrt{3}$ であることはよく知られていますね。これを数値的に求めていく方法がニュートン法です。

この方法が最近注目されているのは、AIの研究で問題になっている膨大な計算量を解決する方法の一つと考えられるようになったからです。ものすごい数の方程式の解を求める必要があるとき、このニュートン法はシンプルで解に収束しやすいのでよく使われるようになっているそうです。

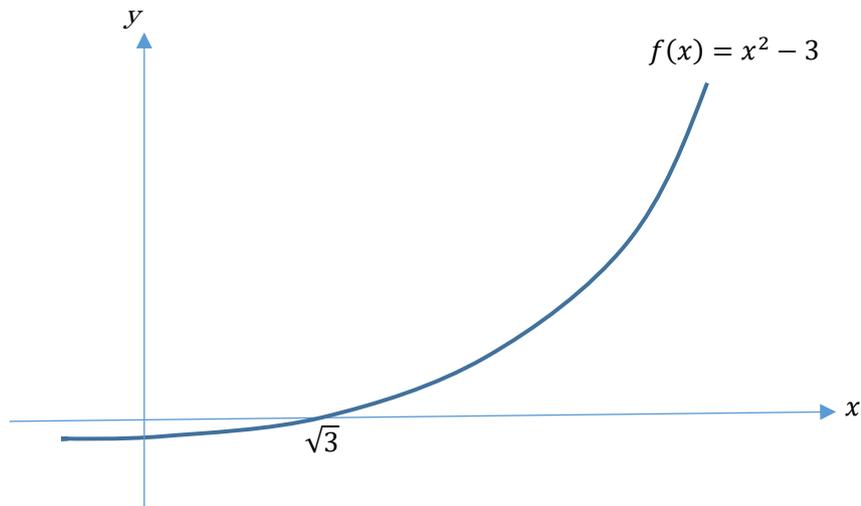


図 1

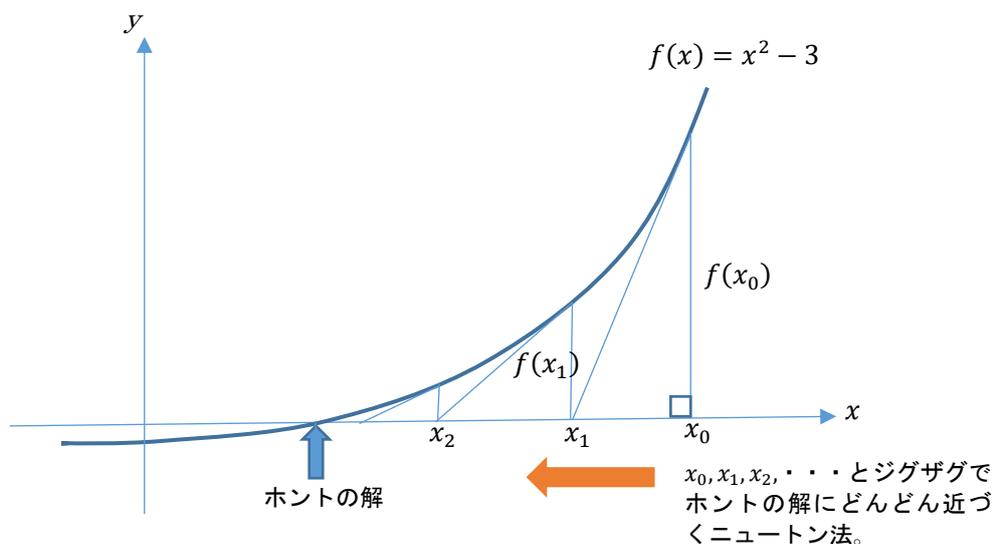


図 2

### ニュートン法とは

図 2 を見てください。この曲線の方程式を  $y = f(x)$  としましょう。

例えば  $x = x_0$  のときは  $y$  の値は  $f(x_0)$  となりますね。

このとき曲線上の点  $(x_0, f(x_0))$  を通る接線が  $x$  軸と交わる交点の値を  $x_1$  とします。するとこの接線の傾き  $f'(x)$  は

$$f'(x_0) = \frac{f(x_0)}{x_0 - x_1}$$

と書けることになります。

次に  $x = x_1$  の時に同様に考えるとこの時の接線と  $x$  軸との交点を  $x_2$  とすると

$$f'(x_1) = \frac{f(x_1)}{x_1 - x_2}$$

となります。これはどんどん同じことができることはわかりますか。

すると式を変形して

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

で  $x_1$  が求められてそれを使って

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}$$

$x_2$  が求められるという風に、どんどんこの曲線と  $x$  軸との交点に近づいていくことができます。これがニュートン法です。

### 数学の授業

高校の時、数学の先生がこのニュートン法を説明してくれた時を今でも覚えています。

その時『なんでこんな面倒くさいことをわざわざするの?』という気持ちと、解のほうへ収束していく幾何学的な巧みさに感心する気持ちとがごちゃ混ぜになって、同じ数学好きな仲間と笑ってしまいました。すると先生も笑っています。何か数学っていいなって思った瞬間でした。

でもコンピュータで  $\sqrt{3}$  や  $\sqrt{2}$  が数値として精度良く求められると知っていたらもっと違う印象を持ったと思います。このことを知ったのは、ずっと後になってからでした。

	1	2	3	4	5	6
1						
2						
3						
4						
5						
6						
7						
8						
9						
10						
11						
12						
13						
14						
15						
16						
17						
18						
19						
20						
21						
22						

図 3

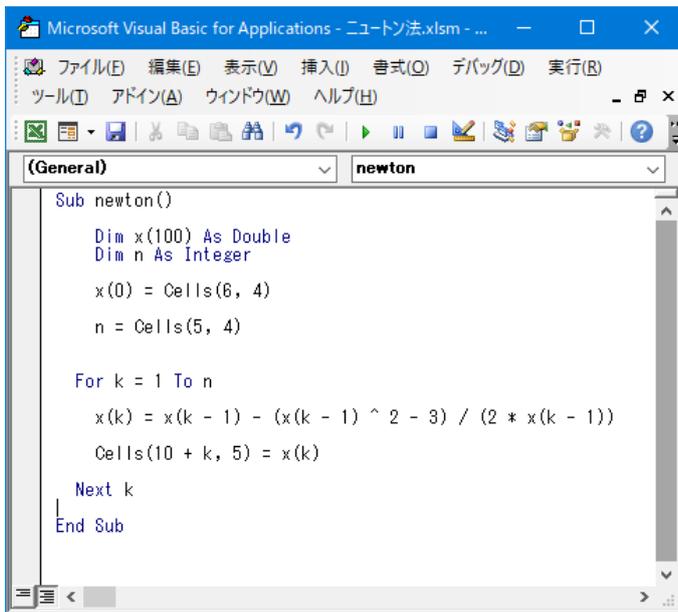


図 4

## $\sqrt{3}$ の数値解

それでは、ニュートン法を使って  $\sqrt{3}$  の数値解を求めてみることにしましょう。

まずエクセルの新しいシートに図 3 のように実験ラボを作りましょう。これまでの中で一番シンプルなラボです。x(20) まで書いてありますが x(11) まで見えていますね。

次に「開発」タブから「Visual Basic」を出して「コード」を書く白い紙を出します。

図 4 はコードを書いたすべてです。それではプログラムの説明をします。

まず x(100) を倍精度(Double)として定義しています。この x(100) は括弧の中を 0 から 100 まで変えられる配列型の変数です。「ブロック崩し」で登場したのを覚えていますか。

まずセル(6,4) の値を X(0) とおきます。ここでは 7 と置いています。これは自分で自由に設定してください。ニュートン法を繰り返す回数をセル(5,4) からよみこませて n = 20 としています。

For k = 1 To n



Next k

この四角の中を日本語で説明できますか。ここがこのプログラムの心臓部ですね。ああ、これが黒板と図で説明したことだと分かるまで考えましょう。プログラムコードが読めるようになる人は、こんなところを納得するまで紙に書いて理解しようとする人なのです。

よくわからないところは、仲間と話し合きましょう。そして教えてくれた人に感謝しましょう。次は君が教える番になるはずですよ。

$$\sqrt{3} \cong 1.73205\ 08075\ 68877\ 29352$$

(人並みにおごれや)

$$\sqrt{2} \cong 1.41421\ 35623\ 73095\ 04880$$

(一夜一代に夢(ひと)見頃)

$$\sqrt{5} \cong 2.23606\ 79774\ 99789\ 69640$$

## $\sqrt{3}$ の数値解 続き

プログラムが **F8** を使って走りそうだったら、**F8** を使ってワンステップずつ進ませてください。プログラムと、**図 2** のイメージとを重ねて「Sheet1」に数字が書かれていく様子をみてみましょう。くれぐれも

▶ は使わないこと。あっという間に計算が終わり、何が起こったのか意味不明です。そんな人は、もう一度ワンステップずつやり直してみましょう。

少数以下 20 桁の  $\sqrt{3}$  の数値を黒板に書きました。比べてみてください。

また  $\sqrt{2}$  や  $\sqrt{5}$  の数値も同じように書いておきましたので、これを研究テーマとする人はチャレンジしてみると面白いでしょう。