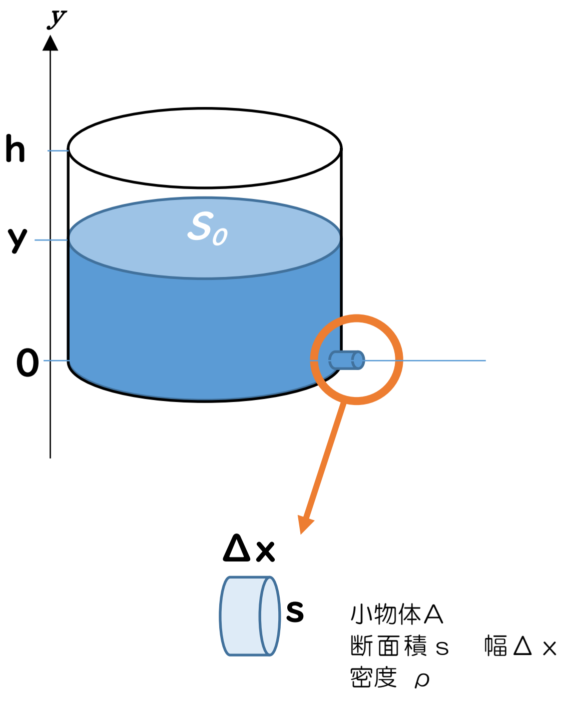


図 5-1

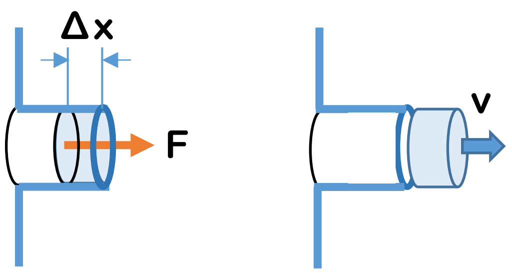


図 5-2

式を立てる

図 5-1 の上のように、断面積が S_0、底から上辺までの高さが **h** の円筒形の水タンクを考えてみます。

このときタンクの底の位置を原点として鉛直上向きに正の y 座標を設定しておきます。水が満タンの時

y = h

となります。また、この水タンクには、水の出るコックが底の側面右についていて、そのコックの断面積が **s** だとします。

コックを開いて水を出している時、この水タンクの水面の高さが **y** だったとして、コックから飛び出す水の速さ **v** はどうなるのでしょう。ちょっと考えてみることにします。

図 5-1 の下のように、断面積が **s** で幅が **Δx**の円筒形をしている水でできた小物体 A を考えます。このときこの小物体 A には、**図 5-2** のように左から水の圧力からくる力 **F** が、A が飛び出すまで一定の力でかかると仮定します。**Δｘ** というのは「**ほんのちょっとの幅ｘ**」ということでこの程度の移動で、水の圧力が変化することは無視できるとします。

これが、**Δｘ**の「肝（きも）」です。つまり **Δｘ**の間は、一定の力で変化が起こっているという考えで、こうやって「**微分形Δ**」の式を作っていくのです。

ここで水の圧力 **p（ｌ m^2 当たりの力）** は

$$p=\rho g y \quad [N/m^2]$$

と書けます。ここで **ρ** は水の密度（$1m^3$ 当たりの質量 kg）です。

また小物体 A に加わる力 F は

F=Ps

とあらわすことができます。

蛇口にある小物体Ａについて考える。Ａは幅がΔx、断面積がsの微小な円筒型であり水で作られている。

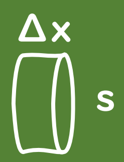


図２のように小物体Ａを左から水の圧力pによる力FでΔxだけ押したとすると、その仕事分だけＡは運動エネルギーを獲得する。

$$F\Delta x = \frac{1}{2} m v^2$$

ここで　$F=ps$　また　$p=\rho g y$

水Ａの質量mは　$m=\rho s \Delta x$

これらを代入して

$$\rho g y s \Delta x = \frac{1}{2} \rho s \Delta x v^2$$

よって

$$g y = \frac{1}{2} v^2$$

$$v = \sqrt{2gy} \quad \cdots ①$$

上の黒板を見ながら、鉛筆で式を初めから書いてみましょう。

放水の速さＶ

　左の黒板の講義を読んでみてください。物理の基本的なことが分かっている人は理解できると思います。

　結果は、タンクの蛇口から放水される水の速さ**v**は水面の高さ**y**の√に比例していることが分かります。

　すると、時間が**Δt**の間に水タンクの水が**Δy**だけ減少したとして、下の流れに沿って鉛筆で式を作ってみましょう。

①Δtの間でどれだけ放水されますか？蛇口の断面積ｓと水の速さｖと水の密度ρとを使って答えなさい。

②一方でΔｔの間にタンクの水はΔｙだけ下がります。体積としてはどれだけ減少しますか。

③　①とρ×②は等しいことを使って、式を作りなさい。

④　左の黒板の結果ｖを代入してみましょう。

タンクの水が減った分、放水されるわけだから$\Delta y < 0$を考慮して

$$\rho \Delta y S_0 = -\rho sv\Delta t$$

ここで①式を代入して

$$\rho \Delta y S_0 = -\rho s\sqrt{2gy}\ \Delta t$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta t} = -\frac{s}{S_0}\sqrt{2gy} \quad \cdots A$$

A式のΔ (delta) をどんどん小さくしていった極限をdと書くことにするとA式は

$$\frac{dy}{dt} = -\gamma\sqrt{2gy} \quad \cdots \boxed{A}$$

とまとめることができる。($\gamma = s / S_0$)
このような微分形を含む方程式を一般に「微分方程式」と呼んでいる。

上の黒板を見ながら鉛筆で式を書きA式を求めてみましょう。

微分方程式

A式を導けた人は、かなり数理的な感覚が身についた人です。こういった問題は難関大の入試問題などにも出題されますが、こういう問題を正面から考えられる人になってほしいという、大学側からのメッセージなのでしょう。

さてA式の左辺は何を意味しているか分かりますか。そうです。「1s当たりyがどれだけ減少しているか」つまり、タンクの水面が減少していく速さを意味しています。つまり、求めたかった水面の減少スピードが式で表されたことになりますね。

しかし、このA式はどのようにして解けばいいのでしょう。

方法①　解析的に解く

数学の先生は、これを皆さんがよく使う2次や3次の方程式や指数関数といった既知の関数に置き換えることをすると思います。これを「解析的に解く」といいます。でも、微分方程式の中でうまくその方法で解けるのはそんなに多くありません。それでも、大学に入るといろんな関数が開発されてきたことを学びます。(理数系の学部ひょっとして数理経済学にも出てくるかもしれません。) このテキストの最後のほうに、A式を解析的に解く方法を書いておきました。興味がある人は見てみると面白いと思います。

方法②　コンピュータで解く

「きみろんComp」はコンピューターを君の研究の強力な道具として使うための基礎をやっています。このA式をコンピュータで解く方法も開発されていて**オイラー法**と呼ばれています。もっと精度を上げる方法もあって**ルンゲ=クッタ法**と呼ばれる方法もあります。

数式を書く

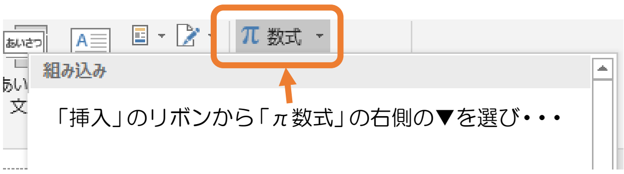
　ここでコンピュータ上にどうやってきれいな数式を書くかという問題に触れておきます。

　この問題は長い間コンピュータの課題となってきました。これまでワードでも数式をスラスラ書くことはできませんでした。現在、理系の人が論文を書くときは、数式の書ける LaTeX（ラテフ、ラテック）というフリーソフトを使います。名前が少しずつ進化していて、今は LaTeX2 ε（ラテフ２イプシロン）と言われたりしています。実は物理のテキスト MizoPhysics Ⅰ Ⅱは、この TeX（テフ）で書かれています。LaTeX は、はじめ TeX（テフ）と呼ばれていたのです。現在も、アメリカの数学学会の論文は LaTeX でないと受け付けないそうです。1978 年に数学者のドナルド・クヌースが、最初に数式の組版システムとして発表した TeX が発展し今の LaTeX2ε になっているそうです。行列式などをきれいに書くことができ優れているのですが、書くときはプログラムのように書いていくので、慣れない人は「ひえーっ」という感じだと思います。

　高校の数学や物理の先生は、数研という教科書会社が出した「スタディエイド DB」というソフトでプリントを作っている人が多くなりました。これは、すらすら数式と日本語が境界なく書けるので、本当に助かっています。このソフトも中に TeX が入っているらしいです。

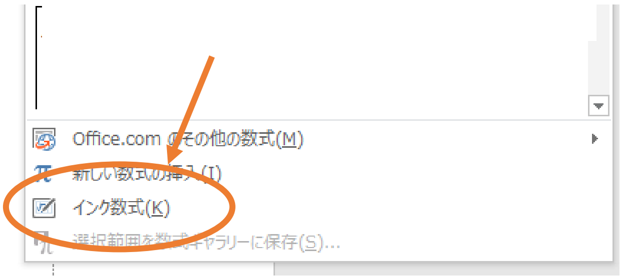
　さて、最近ワードも数式を書くのが少し楽になりました。それは、「**インク数式**」というソフトが入ったことと、もう一つ、なんと「**LaTex**」が使えるようになったのです。まず、インク数式は、数式をマウスで手書きすると、きれいな数式に直してくれるものです。左に図で説明しましたのでやってみてください。

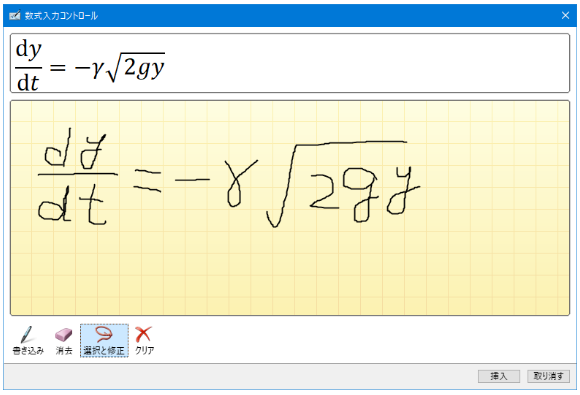
ワードを立ち上げ、数式を挿入したい部分をクリックして、カーソルがちかちかなるようにします。



「挿入」のリボンから「π 数式」の右側の▼を選び・・・

下のほうにある「インク数式」をクリックします。



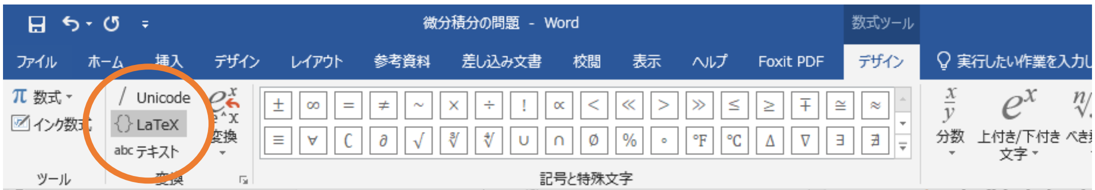


これがインク数式の紙です。マウスで式を書きます。消しゴムで修正したり、変換が違う文字だけ囲んで書き直すとかできて楽しいです。

$$\frac{dy}{dt} = -\gamma\sqrt{2gy}$$

WORD で LaTeX を使うとこうなる

上の数式入力枠を「挿入」→「π数式」から出します。文章を書いている途中だと、キーボード入力のほうが楽な時があります。そのときは「半角」にして「ALT」を押しながら「Shift」押して「＋」と「＝」を同時に押します。指が足らんがねー！！スゴ技です。ちなみに何回かしないと出てこない場合があります。

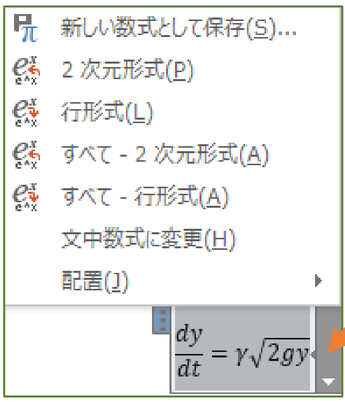


「数式ツール」の「デザイン」を開くと上のようになります。左側に「LateX」がありますね。これをクリックして・・・・

と LaTeX の文体で書いて最後 ENTER キーを押すと

$$\frac{dy}{dt} = -\gamma\sqrt{2gy}$$

となります。まあ、分数は fraction とか忘れたらネットで「LateX　数式」で検索すればいいのでこっちはなかなかのスピードかもしれません。¥はキーボード「ろ」のとこの「＼」（バックスラッシュ）が普通ですが¥としか出てこないパソコンもあります。こっちも同じ意味です。（富士通は¥と出てくる）



ワトソンと
クリック

数式の右側をクリックすると、「二次元形式」というのが出てきます。二次元とは一行の中に納まらない「カッコイイ」普通の式のことです。一行形式だと dy/dt=γ√（2gy）といったダサイ形になります。

LATEX IN WORD

手書きも面白いのですが、最近 WORD で使えるようになった LaTeX は魅力的です。大変美しい数式が書けます。それを図で紹介しています。左の図の流れを追って読んでください。高校生で LaTeX はちょっとおしゃれです。

数学オリンピックの日本代表になった早川先輩は、妹に質問された「**イオの噴火の初速度問題**」が引っかかり、京大医学部の試験会場でも考えていたそうです。

宮崎に帰ってくるなり、僕（Mizo-T）の所に来て、「**イオの噴火初速度問題**」について質問してきました。準備していた解答（君たちはまだ見ていません）をみせると、解答の一番論理的に弱いところを質問してきました。「それは僕もわからない」というと「証明してみます」と帰っていきました。彼が京都に立つ直前に、二人で「**イオの噴火初速度問題**」について再び話し合いました。結局僕の解答の正しさは、早川君が証明してくれたのですが、そのとき彼が証明をした論文は LaTeX で書かれていました。

LaTeX に興味がある人は、ネットで調べてみてください。数式だけならワードを使ってすぐ書けるようになりますよ。

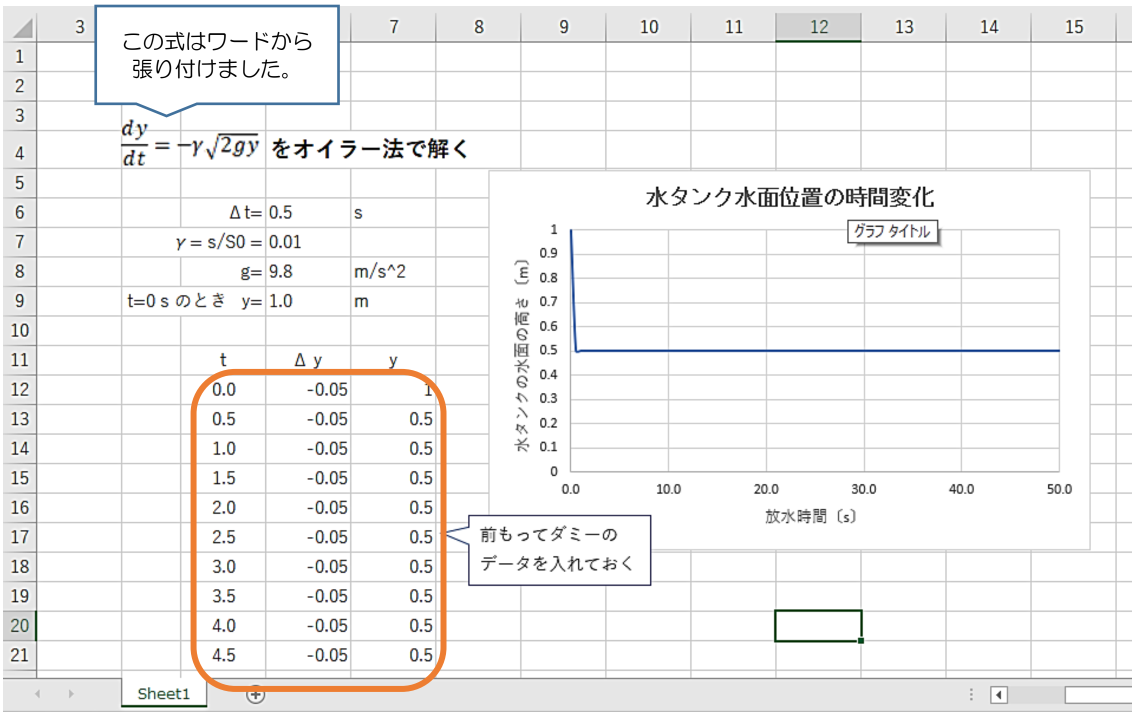


図 5-3

オイラー法とは

$$\frac{dy}{dt}=-\gamma\sqrt{2gy}$$

のような微分方程式のｄをΔに変えて、例えばΔｔ＝0.1ｓという微小な時間間隔でｙの変化Δｙがどれぐらいの大きさになるか

$$\Delta y = -\gamma\sqrt{2gy}\ \ \Delta t$$

の式から数値的に求めていきます。

例えばｔ＝０のときにｙ＝１ｍ だったとするとそこからΔｔ＝0.1ｓ 経った時はγ＝0.01として

$$\Delta y = -0.01\times\sqrt{(2\times 9.8\times 1)}\times 0.1$$
$$=-0.0044\text{m}$$

するとΔｔ＝0.1ｓ後の水の高さｙは

$$y+\Delta y = 1-0.0044=0.9956\text{m}$$

次にΔｔだけ経った時はｙ＝0.9956ｍ として同じ計算をします。こうやってΔｔ秒後のｙを次々と数値計算していく方法です。

実験ラボを作る

「お風呂問題」の微分方程式

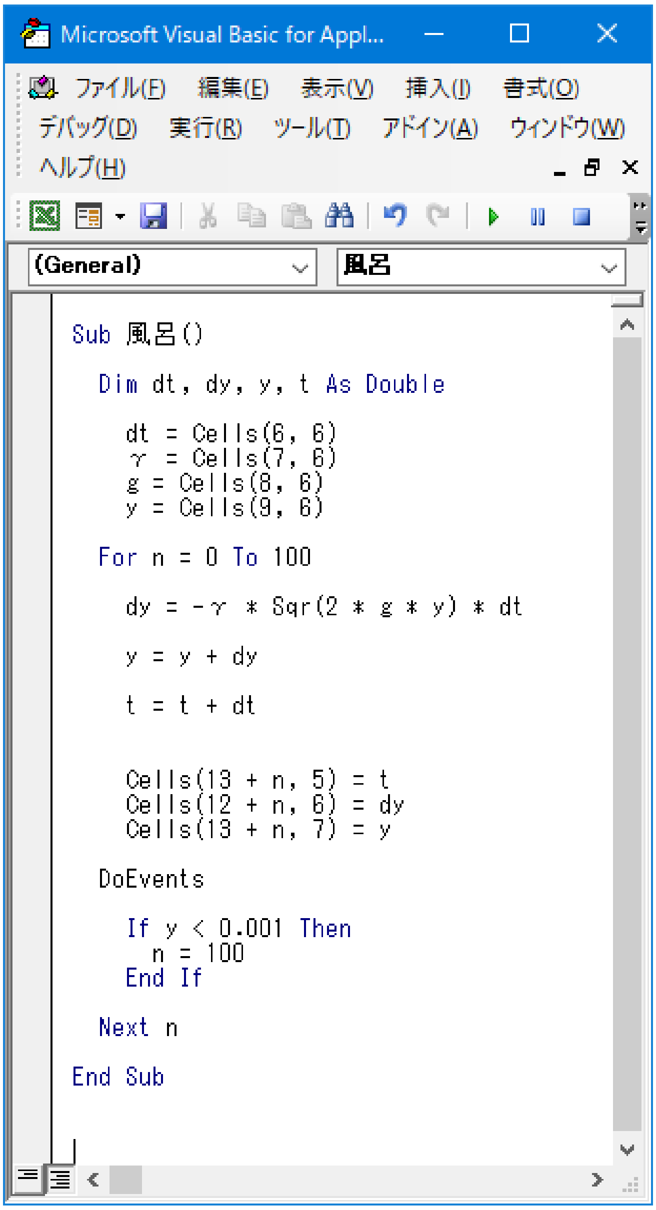
$$\frac{dy}{dt}=-\gamma\sqrt{2gy}$$

をオイラー法で解いてみましょう。まず図 5-3 のような実験ラボを作りましょう。グラフの目盛りは固定しておきます。もちろんどれだけの時間で空になるかはわかりません。実際は適当に時間を決めてグラフを作っておき、実験結果から目盛のサイズを変えていきます。

γはタンクの断面積 S_0 と排出口の面積 s との比です。実際は自分の家のお風呂を計測しておく必要があります。gは重力加速度です。

オイラー法の計算で出てくる数値を入れるところには、適当にダミーの数値を入れておきます。

オイラー法については、左の黒板に書いておきました。一回しっかり読んでおきましょう。



プログラムを書く

まず変数の定義がまとめて書いてありますね。『はやく教えてほしかった』と思いますが、いきなりこれを書くと、意味が分からない人が出てくるので…ごめんなさい。

次に文字にセルの値を読み込ませます。

次にオイラー法の心臓部です。

$\Delta y = -\gamma\sqrt{(2gy)} \times \Delta t$

を計算して、その結果を再び

$y = y + \Delta y$

$t = t + \Delta t$

と新しいyとtに入れていますね。そしてそれを、グラフを作るデータ表に順番に入れていくようにしてあります。つまり Δt ずつしか進まないアリのようなもので、そのときのタンクの減り具合 Δy を計算して、タンクの新しい水面の高さを計算して、また Δt 進むということをしているわけです。

DoEvents はここでグラフを描きなさいという意味でした。

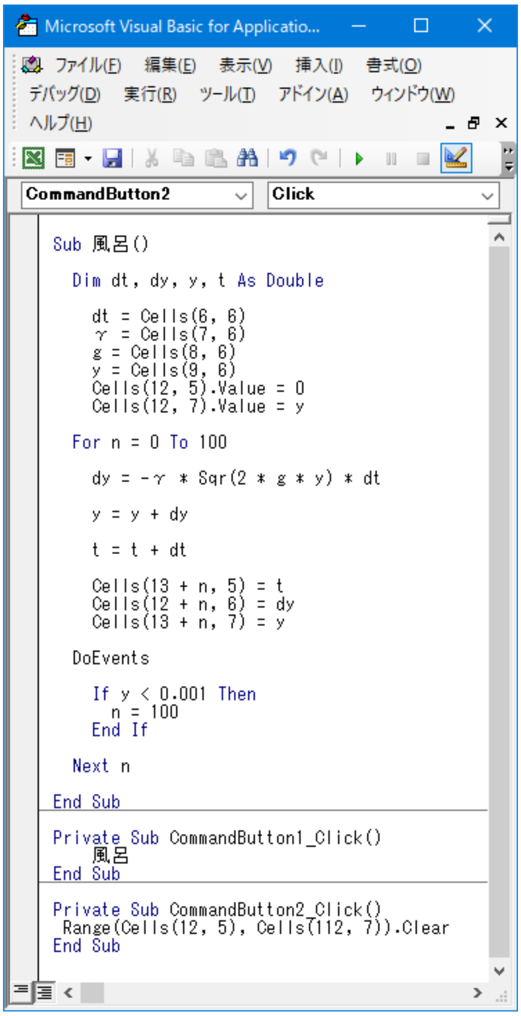
さて次の

```
If y < 0.001 Then
    n = 100
End If
```

というのはどういう意味でしょう。周りと話してみてください。

まず F8 で少しずつ動かしながらバグ（プログラムのミスのこと。バグはプログラムに住みつく虫の意味です。）を取り除いていきます。うまくいきそうなら、▶で走るようにして、最後スタートボタンと、リセットボタンを自分で考えて作りましょう。

図 5-4　START で 1m の高さの水面が下がっていく。




```
Sub 風呂()

  Dim dt, dy, y, t As Double

    dt = Cells(6, 6)
    γ = Cells(7, 6)
    g = Cells(8, 6)
    y = Cells(9, 6)
    Cells(12, 5).Value = 0
    Cells(12, 7).Value = y

  For n = 0 To 100

    dy = -γ * Sqr(2 * g * y) * dt

    y = y + dy

    t = t + dt

    Cells(13 + n, 5) = t
    Cells(12 + n, 6) = dy
    Cells(13 + n, 7) = y

  DoEvents

    If y < 0.001 Then
      n = 100
    End If

  Next n

End Sub

Private Sub CommandButton1_Click()
    風呂
End Sub

Private Sub CommandButton2_Click()
  Range(Cells(12, 5), Cells(112, 7)).Clear
End Sub
```

オイラー先生！書き過ぎっ

オイラー法を発見したオイラーは 1707 年スイスに生まれています。1700 年代、コンピューターもない時代に、こんな方法を発見すること自体すごいことですが、一方で、「一つ一つ計算してみたんかい？」とツッコミも入れたくなります。

彼はウィキペディアによると、「人類史上最も多くの数学の論文を書いたと言われ」現時点で 886 篇の論文が確認されているそうです。これらの総量は 5 万ページを超える量で、1911 年から刊行が始まった彼の全集は、100 年以上たった今もまだ未完成で、刊行し続けているそうな。オイラーもすげーが、印刷屋も負けてませんな。

このオイラー法に対しては、よく「精度がいまいちだよね。」と偉そうに言う知ったかぶりがいます。次のページにこの微分方程式を解析的に解いてみましたので、興味がある人は、どのぐらいずれているか研究してみても面白いと思います。その後 1900 年になって、より精度の高い微分方程式の近似解法であるルンゲ＝クッタ法が発見されます。この時にも、まだコンピューターは発明されていませんでした。

解析的な解法

$$\frac{dy}{dt} = -\gamma\sqrt{2gy}$$

のような微分方程式を数学的に別の関数に置き換えられる場合があります。これを解析的に解くといいます。

両辺にｄｔをかけます。

$$dy = -\beta y^{1/2} dt \quad (\beta = \gamma\sqrt{2g})$$

$$y^{-1/2} dy = -\beta dt$$

両辺を積分します。

$$\int y^{-1/2} dy = -\beta \int dt$$

$$2y^{1/2} = -\beta t + C$$

$t = 0$ のとき $y = 1$ として $C = 2$

$$2y^{1/2} = -\beta t + 2$$

両辺を二乗して

$$4y = (-\beta t + 2)^2$$

$$y = (\beta t - 2)^2 / 4$$

$$y = \frac{1}{4}(\beta t - 2)^2$$

これが解析的に求めた関数です。ｙはｔの二次関数になっていることが分かります。

微分方程式の世界

一方で、コンピューターのなかった時代には、微分方程式を解析的に解く方法の研究が続きました。

しかし、左の黒板のようによく知られた関数に置き換えられる微分方程式は限られていました。

そこで、逆の発想も生まれたのです。例えば

$$x^2 \frac{d^2y}{dx^2} + x\frac{dy}{dx} + (x^2 - m^2)y = 0$$

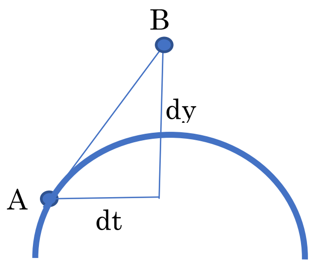
という微分方程式は解析的に解くことができません。それならこの関数だったらこの微分方程式を満たすことができるという関数を探せばいいんじゃなかろうか、というアイデアです。この例にあげた微分方程式の解の一つである関数は「**ベッセル関数**」といわれています。

1960 年代になって、この関数が、銀河系の回転速度を解析するのにつかわれ、その結果、銀河にはこれまで人類が知らない未知の物質（**ダークマター**）があることが発見されます。数学の研究が、とんでもないものにつながっていったいいい例です。

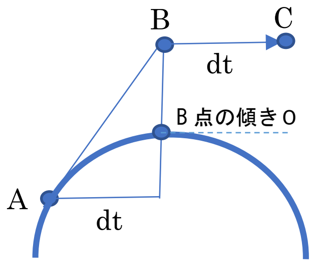
それでは、いつ頃から微分方程式の計算に本格的にコンピューターが使われるようになったのでしょう。それは、おそらく、ソビエト（現在のロシア）が人類で最初にスプートニクという人工衛星を打ち上げた 1957 年前後だと思います。

当時、科学技術や軍事力で世界の覇者を自認していたアメリカにとって、このスプートニク衛星の成功は科学技術に関係する大きな転換点となりました。「**スプートニクショック**」と呼ばれています。社会主義連邦であり、自分たちより「遅れている」と思っていたソビエトが、先に、人工衛星を成功させたのです。アメリカにとって大きな屈辱でした。

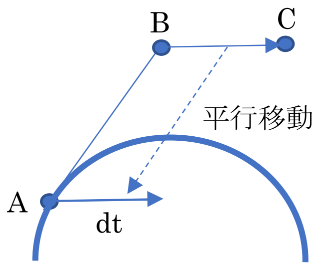
ルンゲ=クッタ法の誕生



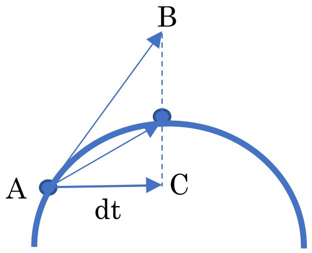
①　オイラー法でＡ点までうまく解となる曲線の上を動いてきたとします。次に右に dt だけ言った時、A 点の接線の傾きの情報しかありませんので、dy だけ上に行った B 点に行ってしまいました。



②　すると B 点でも、傾きの情報しかもらえませんので、実際の B 点の傾き、この図では傾き０にしてある方向 C に行くことになります。このまんまじゃずれが大きくなりそうです。オイラー法では、こういったことが起こらないように dt を十分小さくする必要があります。



③　それ以外の方法はあるのでしょうか。ルンゲ・クッタ法では、B 点に来た時の傾きベクトルを A 点に前もって持ってきます。傾きの情報だけは、一つ先の B の傾きでも微分方程式から手にすることができます。



④　そしてこの AB ベクトルと AC ベクトルの中間の傾きの方向にｄｔだけ進むという方法です。
これは二次のルンゲ・クッタ法と呼ばれています。現在コンピュータの数値計算でよく使われるのは４次のルンゲ・クッタという方法です。

NASA の前身であったラングレー研究センターは戦前からあり、航空機の理論研究を行っていました。航空機の理論計算は、多くの微分方程式を解く必要がありました。その方法は、「計算手」といわれる人間達が人力で、オイラー法で、ルンゲ・クッタ法で計算したのです。その「計算手」には、特に女性、その中でも当時としては画期的な優秀な黒人女性も白人女性にまじって採用されました。彼女たちは、大学出の数理系の天才たちでした。この黒人女性の物語は「ドリーム」という映画にもなっています。そしてこの「計算手」の人たちは「コンピュータ」と呼ばれたそうです。
こうして彼女たちの仕事は最初の人工衛星、そして月へ向かうアポロ計画へとつながっていきます。

ルンゲ・クッタ法

左に、「**ルンゲ・クッタ法**」を紹介しています。ざっくりいうと、「オイラー法」の精度をより上げた方法が「**ルンゲ・クッタ法**」です。テキストでは、この「ルンゲ・クッタ法でプログラムを組むことはしませんが、大まかな意味が分かってもらえば OK です。
微分方程式は、一階微分だと

$$\frac{dy}{dt} = -\gamma\sqrt{2gy}$$

のように、求める解の接線の傾きしか情報を与えません。その傾きだけを頼りに、解の曲線を描いていくのが、数値計算法です。
オイラー法でも dt を小さくすればするほど精度は上がることになります。しかし、計算量は膨大になりますね。ルンゲ・クッタ法は、その得られる傾きの情報を、先取りして平均するという方法で精度を上げていきます。